

Problemi con esponenziali e logaritmi

Antonella Marchioro

Aprile 2009

Capitolo 1 Studenti

(1) Meglio non farsi bocciare

Alessia, che fino ad oggi ha studiato matematica per 10 minuti al giorno, decide di aumentare gradualmente studiando ogni giorno il 5% in più del giorno precedente. In quanti giorni arriverà a studiare almeno 2 ore al giorno? Fra un mese quanto studierà in un giorno?

(2) Pigra o più efficiente?

Chiara studia tutti i giorni 3 ore. Se decidesse di diminuire il tempo, studiando ogni giorno il 5% in meno del giorno precedente, dopo 15 giorni quanto studierebbe?

(3) Col sole e con la pioggia

Damiano si allena ogni giorno. Ieri ha percorso a piedi 1 km e ha deciso di arrivare a fare almeno 10 km al giorno, aumentando ogni giorno del 2% rispetto al giorno precedente. In quanti giorni si porterà al regime voluto?

(4) C'è chi preferisce la bici

Michele corre in bicicletta e vuole partecipare alla Padova-Assisi. Ha 3 mesi di tempo e decide di allenarsi iniziando da 1 km il primo giorno e finendo con 60 km l'ultimo giorno. Decide che ogni giorno aumenterà la distanza percorsa di una frazione fissa rispetto al giorno precedente. Calcolare tale frazione.

(5) Parenti strozzini

Giacomo si è fatto prestare 100 euro da zio Paperone, accettando di restituirglieli al tasso del 6% mensile. Che somma dovrà sborsare tra 10 mesi?

(6) Frenare dolcemente

Sofia sta collaudando un nuovo tipo di freni. Corre alla velocità di 100 km/h e aziona i freni che diminuiscono la velocità del 15% ogni secondo. In quanto tempo si fermerà? In quanto tempo la velocità diventerà minore di 1 metro al secondo?

(7) C'è chi scende e c'è chi sale

Marta e Luisa decidono di dipingere di bianco le pareti delle scale della scuola (durante l'intervallo). Marta parte dall'ultimo piano e Luisa dal piano terra. Il primo giorno Luisa avanza di 1 metro, Marta di 10 cm. Nei giorni successivi Marta diventa sempre più veloce e ogni giorno avanza del 5% in più rispetto al giorno prima, mentre Luisa è sempre più stanca e ogni giorno avanza del 5% in meno rispetto al giorno precedente. In quale giorno dipingono un tratto di uguale lunghezza?

Se la lunghezza totale delle pareti è 50 metri, quando si incontrano quanti metri ha dipinto ciascuna? Quanto tempo servirebbe a Marta per fare tutto il lavoro da sola? E a Luisa?

Capitolo 2 Problemi vari

(1) Nella provincia X della regione Y della Cina occidentale il numero di abitanti cresce ogni anno della sua trentesima parte. Nel 2000 c'erano 100000 persone. Quale sarà il numero di abitanti nel 2100?

(2) Dopo il diluvio universale la Terra si è ripopolata di esseri umani a partire da sei persone. Supponiamo che dopo duecento anni il numero di persone sia già cresciuto fino a 1000000: di quale sua parte il numero di persone è dovuto crescere ogni anno?

(3) Se il numero di abitanti della città Z raddoppiasse in un secolo, quale sarebbe l'incremento annuo?

(4) Se il numero di abitanti della città W cresce di un centesimo ogni anno, dopo quanti anni il numero di abitanti sarà dieci volte maggiore?

(5) Un tale deve restituire 400000 euro, con la condizione di pagare ogni anno un interesse del 5 per cento. Paga ogni anno 25000 euro. Dopo quanti anni il debito sarà estinto?

Capitolo 3 La vita sull'isola di Alosi

(1) Un'epidemia

Un virus fastidioso ma non letale ha colpito la popolazione dell'isola di Alosi nel Pacifico centrale. Il contagio si propaga con una regolarità sconcertante: ogni persona infetta contagia una persona sana ogni 36 ore. Il 17 aprile 2009 l'isola contava 62000 abitanti e l'1% di questi era già stato contagiato. Dopo quanti giorni il virus avrà colpito il 50% degli abitanti? In che data tutti sull'isola saranno infettati?

(2) Elezioni

Sull'isola di Alosi ogni anno si svolgono le elezioni politiche e da decenni i due partiti più votati sono il Partito Giallo e il Partito Marrone. Nel 2000 il Partito Giallo ha vinto con un clamoroso 50% dei voti, ma poi ogni anno ha perso l'1% dei voti rispetto all'anno precedente. Il Partito Marrone nel 2000 ha ottenuto solo il 20% dei voti, ma poi è sempre cresciuto ogni anno del 5% rispetto all'anno precedente. Se questo andamento continua in che anno ci sarà il sorpasso?

(3) Una spiaggia alla moda

La costa settentrionale dell'isola di Alosi era un piccolo paradiso terrestre finché non è stata scoperta dal turismo

di massa. Una volta crescevano palme e piante di ogni tipo, oggi crescono solo piante dei piedi e palme delle mani. In particolare sulla spiaggia di Olosej più gente c'è, più altra gente ci va: dal maggio 1990 ogni mese si è osservato un aumento costante delle presenze del 2% rispetto al mese precedente. Attualmente sono 10000 presenze. Quante erano 3 anni fa?

(4) Consumatori conformisti

La gente dell'isola di Alosi non è diversa dal resto del mondo. Più magliette gialle a pois vede in giro, più la gente compra magliette gialle a pois. Precisamente l'aumento di tali magliette ogni mese è pari al 9% rispetto al mese precedente. Se questo mese se ne sono vendute 3000, quante il mese scorso? E 6 mesi fa?

(5) Al bar come sardine

Il bar del liceo Idom, la scuola più famosa dell'isola di Alosi, a mezzogiorno si riempie sempre allo stesso modo: all'inizio entrano 40 studenti, poi ne entrano sempre meno e gradualmente il flusso rallenta, perché quante più persone sono dentro meno persone entrano, finché non si vede più spazio neanche per uno studente e nessuno entra più. Precisamente gli ingressi ogni 5 minuti diminuiscono del 50% rispetto agli ingressi nei 5 minuti precedenti. A che ora il bar ha raggiunto la sua capacità massima?

Capitolo 4 Flora e fauna sull'isola di Alosi

(1) Ninfee: portatevi la macchina fotografica!

Sulla costa sud dell'isola di Alosi, a 30 km dalla capitale Avodap, sorge il villaggio di Oloap, famoso in tutto il mondo per le sue ninfee dorate. Il villaggio si è sviluppato attorno ad uno stagno di 200 m² che ogni anno da aprile si ricopre pian piano di bellissime ninfee dorate. Oggi, 20 aprile, occupano solo 1 m², però ogni giorno crescono del 10% rispetto al giorno precedente. Quando si potrà vedere lo stagno coperto interamente di ninfee?

(2) Edera: la natura farà il suo corso.

L'edera si sta arrampicando sul muro esterno dell'aula 42 del liceo Idom dove si riuniscono i migliori talenti dell'isola di Alosi. Oggi sul muro chiaro spiccano due zone di un tenero colore verde edera: una di forma rettangolare lunga un metro e alta 50 centimetri, l'altra di forma triangolare alta 2 metri e larga 50 centimetri alla base. Se il muro è lungo 20 metri e alto 4 metri, presumendo che nessuno tolga l'edera e che la natura faccia il suo corso, ipotizzando una crescita giornaliera del 7%, in quanti giorni il muro sarà tutto coperto? E se si ipotizza una crescita del 5%? E se la crescita fosse del 15%?

(3) Formiche: ci sono anche loro.

Normalmente la gente non se ne accorge, perché il loro numero resta contenuto e il loro ambiente interseca solo marginalmente l'ambiente dell'uomo. Non fu così nell'aprile 2009 sull'isola di Alosi, quando, dopo un periodo di piogge dolci portate dai venti del sud, il tasso di natalità delle formiche azzurre aumentò fino al 60% alla settimana, mentre il tasso di mortalità precipitò al 2% alla settimana. Inoltre nel giro di poche generazioni le formiche azzurre diventarono sempre più grandi e

invadenti, anche se non aggressive nei confronti degli uomini: furono osservati molti esemplari di 8 centimetri di lunghezza e 3 centimetri di diametro. In un'intervista pubblicata dal Pomeriggio di Avodap il 20 aprile il professor Antony Redant dell'università di Avodap rese di pubblico dominio la stima fatta dal suo gruppo di ricerca: 62 milioni di formiche azzurre sull'isola, mille per ogni abitante. Le piogge dolci erano iniziate 15 giorni prima. Quante erano allora le formiche azzurre prima delle piogge?

(4) Meduse: solo lì sono così. Attenti!

Si è conclusa la ricerca del Dipartimento di Arte Marina dell'università di Avodap diretto dal professor Octo Jelly Oploff. Sono state raccolte e misurate più di 100000 meduse del Mar dei Sorpassi sulla costa sud dell'isola di Alosi. Si è scoperto così che tutte le meduse rispettano la legge di Oploff: il quadrato del volume massimo racchiuso dalla medusa è uguale al cubo della superficie della medusa stessa (in unità di misura del Sistema Internazionale). Si sa che durante la fase di accrescimento una medusa incrementa la sua superficie del 6% ogni giorno. Qual è l'incremento giornaliero del volume? Se oggi una medusa racchiude un volume massimo di un litro, fra quanti giorni sarà così grande da racchiudere un metro cubo?

(5) Superplancton: ai turisti europei piace tanto.

Sull'isola di Alosi si trovano organismi unicellulari di forma pressoché sferica che incrementano il loro volume del 2% ogni giorno. In quanti giorni raddoppiano il loro volume? Qual è l'incremento giornaliero della superficie? Qual è l'incremento giornaliero del diametro? In quanti giorni passano dal diametro di un decimo di millimetro al diametro di un centimetro?

(6) Elefanti da proteggere.

Attualmente sull'isola di Alosi vivono 7 elefanti. Stimando un decremento del numero di elefanti del 10% ogni 10 anni, quanti erano gli elefanti un secolo fa?

(7) Coccodrilli in via di estinzione.

Negli ultimi 50 anni sull'isola di Alosi il numero di coccodrilli si è dimezzato ogni 10 anni. Qual è stato il decremento annuo?

(8) Aquile: portatevi sempre il binocolo!

Il Dipartimento di Arte Montana dell'università di Avodap studia il numero di aquile sulla catena montuosa degli Illoc che attraversa l'isola di Alosi: il numero di aquile è triplicato negli ultimi 10 anni. Qual è stato l'incremento annuo?

Capitolo 5 Cosa si studia sull'isola di Alosi

Problemi tratti dai libri di testo del liceo Idom della città di Avodap nell'isola di Alosi.

(1) Acidità - pH di una soluzione

$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$

Trovare il pH di: uova con $[\text{H}^+] = 1.6 \cdot 10^{-2}$ moli/litro, pomodori con $[\text{H}^+] = 6.3 \cdot 10^{-5}$ moli/litro, latte con $[\text{H}^+] = 4 \cdot 10^{-7}$ moli/litro.

Calcolare la concentrazione di ioni idrogeno in moli/litro

di: aceto con $pH=3.1$, birra con $pH=4.3$, succo di limone con $pH=2.3$.

(2) Altimetri

$$h=(30T+8000)\ln(P_0/P)$$

h =quota in metri, P_0 pressione a livello del mare, T temperatura dell'aria in $^{\circ}C$

Scalando l'Everest gli alpinisti rilevano una temperatura di $-30^{\circ}C$ e una pressione di 320 millibar: a che altezza si trovano?

(3) Carica di un condensatore

$$Q=CV(1-e^{-(t/T)})$$

Tracciare il grafico di Q in funzione di t . Qual è la carica massima che si può accumulare sulle armature del condensatore? Che frazione se ne è accumulata dopo un tempo $t=T$? e dopo $2T$? $3T$? $4T$?

(4) Corrente in un solenoide

$$i=I(1-e^{-(t/T)})$$

Se $T=2$ ms, per avere una corrente di 10 mA dopo 2 ms che I bisogna avere?

(5) Memoria

Solo una frazione F di persone ricorda tutte le parole di una lista casuale di parole dopo un tempo t :

$$F=1-k\cdot\ln(t+1)$$

(k dipende anche dalla lunghezza della lista).

In un gruppo di persone dopo 3 ore solo la metà ricorda l'intera lista: calcolare k e prevedere quanti ricordano tutte le parole dopo 6 ore.

(6) Raffreddamento

Un oggetto a temperatura T_0 viene posto in una stanza a temperatura T_1 : il raffreddamento segue la legge

$$T=T_1+(T_0-T_1)e^{-(kt)}$$

Una sfera d'acciaio portata alla temperatura di $130^{\circ}C$, viene posta in un ambiente a $20^{\circ}C$. Dopo 10 minuti la sfera si è portata a $112^{\circ}C$. Quanto vale k ? Quale sarà la temperatura dopo 20 minuti?

(7) Resistività di un semiconduttore

$$r=A e^{(B/T)}$$

Per un campione di silicio si misurano $r=1.8$ ohm-m quando $T=273$ K e $r=0.6$ ohm-m quando $T=293$ K. Quanto vale la resistività alla temperatura di 353 K?

(8) Rumori

Decibel

$$S=10\log(I/I_0)$$

con $I_0=10^{-12}$ W/m²

Un fruscio di foglie produce 20 dB: quanti W/m²?

La soglia del dolore è di 120 dB: quanti W/m²?

Quando decolla un aereo supersonico produce un'onda sonora con 0.2 W/m²: quanti decibel?

Un macchinario produce 60 decibel; tenendone due affiancate quanti decibel ci saranno?

(9) Sensazioni causate da stimoli fisici

Sensazione S in risposta allo stimolo fisico P

$$S=\ln(P/P_0)$$

Se il più piccolo peso percepibile è $P_0=0.5$ grammi,

valutare S_1/S_2 corrispondenti ai pesi $P_1=10$ g e $P_2=100$ g.

(10) Stelle

Magnitudo di una stella (luminosità di una stella osservata ad occhio nudo)

$$M=6-2.5\log(I/I_0)$$

con I =intensità della luce proveniente dalla stella.

Per le stelle più luminose $M=1$, per le meno luminose

$$M=6.$$

Quanto è più intensa la luce delle stelle con $M=1$ rispetto alle stelle con $M=6$?

(11) Terremoti e scala Richter

Magnitudo di un terremoto

$$M=2/3 \log(E/E_0)$$

con E =energia totale sviluppata dal terremoto.

Risulta $M=5.5$ se $E=10^{13}$ J; quanto vale E_0 ?

Il terremoto del 6 aprile 2009 in Abruzzo ha avuto una magnitudo 6.3 della scala Richter (inizialmente dichiarata 5.8): quanta energia E è stata liberata?

Calcolare quanta energia è stata liberata nei seguenti terremoti.

8 settembre 1905: terremoto in Calabria di magnitudo 7.9, circa 5000 morti e 25 paesi distrutti.

28 dicembre 1908: terremoto di magnitudo 7.2 a Messina seguito da un maremoto, circa 120 mila morti, 80 mila in Sicilia e 40 mila in Calabria.

13 gennaio 1915: terremoto di magnitudo 7.0 ad Avezzano, circa 32600 morti.

27 luglio 1930: terremoto in Irpinia di magnitudo 6.5, 1404 vittime.

15 gennaio 1968: terremoto del Belice (Sicilia occidentale), di magnitudo 6.4, 370 morti, un migliaio i feriti e circa 70 mila senzatetto.

6 maggio 1976: terremoto del Friuli di magnitudo 6.5, 976 morti e 70 mila senzatetto.

23 novembre 1980: terremoto dell'Irpinia di magnitudo 6.5, 2.914 morti, 8.848 feriti e 280 mila sfollati.

26 settembre 1997: terremoto in Umbria di magnitudo 6.4, 11 vittime.

31 ottobre 2002: un terremoto di magnitudo 5.9 a Campobasso, 30 morti, per la maggior parte bambini, a San Giuliano di Puglia.

4 novembre 1952: Kamcatka, Russia, magnitudo 9.0.

12 maggio 2008: Sichuan, Cina, magnitudo 7.8, 88 mila morti.

14 giugno 2008: Iwate e Tohoku, Giappone, magnitudo 7.2, 13 morti.

(12) Legge di Moore

La capacità di memoria di un computer moderno (numero di transistor per unità di superficie di un microprocessore in silicio) si misura in bit/cm². Secondo la legge di Moore questa grandezza a partire dal 1970 si raddoppia ogni 18 mesi. Nel 1970 era pari a 10^{-6} Gigabit/cm² (=1 Kilobit/cm²). Questa legge fu formulata da Gordon Moore nel 1964 (originariamente con un tempo di raddoppiamento di 12 mesi, mentre la versione attuale è degli anni settanta). Quattro anni dopo aver fatto questa previsione Gordon Moore diventava uno dei fondatori di Intel.

In base alla legge di Moore quale valore è previsto per il

2009? E per il 2015?

(13) Legge di Malthus

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

per popolazione omogenea in ambiente invariante, k =tasso di natalità - tasso di mortalità (potenziale biologico della popolazione).

Esaminare i casi possibili a seconda del segno di k . Considerare la popolazione umana sulla terra: sapendo che nel 1965 era dell'ordine di 3.34 miliardi, e stimando un incremento annuo del 2%, scrivere $N(t)$ secondo la legge di Malthus con $t=0$ riferito al 1965. Calcolare il tempo necessario affinché la popolazione terrestre raddoppi, e confrontarlo con il valore osservato, che è di 35 anni. Determinare quando la superficie terrestre non sarebbe più sufficiente a contenere la gente, pensando di poter vivere anche sull'acqua.

(14) Modello di Verhulst: curva logistica

Ad alte densità, un aumento della popolazione produce una diminuzione di fertilità e un aumento di mortalità.

$$N(t) = aN_0 / [N_0 + (a-N_0)e^{-kt}]$$

k =potenziale biologico della popolazione, a =capacità portante del sistema.

Calcolare il limite di $N(t)$ per t tendente a +infinito.

Tracciare il grafico della funzione $N(t)$. Determinare la pendenza della tangente nel punto di flesso e darne l'interpretazione relativamente al problema considerato.

Capitolo 6

La cucina tradizionale di Alosi

(1) Pasta sfoglia: come nell'antico Egitto

Sull'isola di Alosi la pasta sfoglia si prepara ancora oggi secondo un'antica ricetta molto simile a quella inventata dagli Egiziani che preparavano la sfoglia utilizzando l'olio (come poi in Grecia e nella Roma antica) al posto del burro. La lavorazione della pasta sfoglia fa sì che i vari strati di pasta restino separati da strati di burro o olio, l'aria inglobata fra gli strati di pasta si dilata durante la cottura con un processo di "lievitazione fisica".

L'impasto va spianato con il mattarello e poi ripiegato in 3, quindi spianato in modo da triplicarne la lunghezza mantenendo la larghezza e poi ripiegato in 3, ancora spianato e ripiegato in 3... La pasta sfoglia fatta con il burro dopo ogni ciclo di lavorazione richiede una sosta in frigo di 30 minuti.

Con 6 di questi cicli (spianare e ripiegare in 3) quanti strati di pasta si ottengono?

La ricetta tradizionale prevede di iniziare spianando l'impasto e ripiegandolo in 4, poi spianare e ripiegare in 3 per 6 cicli di lavorazione: quanti strati di pasta si ottengono alla fine? Quanto è alto ciascuno se la pasta sfoglia complessivamente è alta mezzo centimetro?

Per avere 1000 strati quanti cicli bisogna fare? E per averne 10000?

Capitolo 7

Cosa sognano sull'isola di Alosi

Il 27 aprile 1900 venne pubblicato "L'interpretazione dei sogni di Alosi" di Sigmund Duerf. In occasione del 109° anniversario il Dipartimento di Arte del Sonno dell'università di Avodap ha pubblicato una ricerca sui sogni degli attuali abitanti dell'isola di Alosi. Ne riportiamo alcuni brani.

(1) Il sogno del coltivatore di fagioli

Una pianta di fagioli di Nomal ogni giorno raddoppia la sua altezza e in 30 giorni arriva a toccare la luna. In quanti giorni è arrivata a metà della distanza terra-luna?

(2) Il sogno del vicino

Una pianta di piselli di Lednem oggi è alta solo un centimetro, ma ogni giorno raddoppia la sua altezza. Quando arriverà alla luna?

(3) Il sogno del cartolaio

Un cartoncino ha lo spessore di un millimetro. Quante volte bisogna piegarlo in due per raggiungere uno spessore pari alla distanza terra-sole?

Capitolo 8

Ultime notizie dall'isola di Alosi

Riportiamo le notizie più interessanti riportate dalla stampa odierna, il Pomeriggio di Avodap e Il Gazzettuccio.

(1) Il lago di Ogal ospita un milione di pesci che non si riproducono e non muoiono di morte naturale. A partire dal 7 maggio ogni giorno viene pescato il 25% dei pesci presenti. Quanti pesci resteranno nel lago dopo 8 giorni di pesca?

(2) Paperino del villaggio di Oloap deposita 100 euro in una banca che gli garantisce un tasso annuo del 2%. Che capitale avrà tra 10 anni?

(3) Sull'isola di Alosi il numero di coccodrilli si è dimezzato in 10 anni. Qual è stato il decremento annuo?

(4) L'edera si sta arrampicando sul muro esterno dell'aula 42 del liceo Idom di Avodap. Oggi copre solo 1 m².

L'intero muro si estende per 80 m². Se la crescita giornaliera è del 7%, in quanti giorni il muro sarà tutto coperto?

(5) Sull'isola di Alosi la popolazione delle scimmie oggi conta 5000 esemplari. Ogni anno il numero di nuovi nati rappresenta il 5% della popolazione, mentre i morti sono il 2%. Quante scimmie ci saranno fra 10 anni?

(6) Si ritiene che il numero di serpenti attualmente presenti sull'isola di Alosi sia di 20000 unità. Stimando un incremento del numero di serpenti del 7% ogni 10 anni, quanti erano i serpenti un secolo fa?

(7) Se il numero di abitanti di Avodap raddoppiasse in un secolo, quale sarebbe l'incremento annuo?

(8) Se il numero di abitanti di Oloap crescesse di un centesimo ogni anno, fra quanti anni il numero di abitanti sarebbe dieci volte quello di oggi?